on a $g(y) = w'(y)\, y^{a'}$

$f_i(y) = v_i(y) \cdot y^{a(i)}$

il suffit de regarder :

$$\int_{x \in \mathbb{Z}_p^n} |v(x) \cdot x^a|^s \, \underbrace{|w(x) \cdot x^b|}\, |dx|$$

$\forall i \quad u_i(x)\, x^{a_i} \in P_n \;\; \notin$

$= 0$

$\neq 0$

$|v(x)|$ cste

pour $|w(x)|$ cste

premiers digits de Teichmüller sont cste.

$c \cdot x^a \in P_n$

$\operatorname{ord}(\dots) \in n\mathbb{Z}$

premiers digits $\quad x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot x_3^{a_3}$

$n\mathbb{Z} \ni \operatorname{ord}(\cdot x^a \cdot) = \underbrace{a_1 \operatorname{ord} x_1} + \underbrace{a_2 \operatorname{ord} x_2} + \underbrace{\operatorname{ord}(\dots)} \dots$

$$\int_{\substack{x \in \mathbb{Z}_p \\ c\, x^{a_0} \in P_n}} |x|^{as+b} \, |dx|$$

Cas de monômes

$$\sum_{m \geq 0} \int_{\substack{x \\ \operatorname{ord}(c x^{a_0}) = m \cdot n \\ \text{prem digits}(c x^{a_0}) = \dots}} |X|^{as+b} \, |dx|$$

$a_0 = c = 1$

$$\sum_{m \geq 0} \int_{\substack{\operatorname{ord}(x) = mn \\ \text{digits} \dots}} |x|^{as+b} \, |dx| = e \cdot \sum_{m \geq 0} \left(p^{(-as-b)n}\right)^m$$

série géom.

$$= \frac{e}{1 - p^{-(an - b)n}} \in \mathbb{Q}(p^{-s})$$

II g générale.

<u>résultat de Denef</u> : Par morceaux déf, on a $|g(x)| \overset{PE}{=} \left|\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\right|^r$

g_i polynômes, $r \in \mathbb{Q}$.

adapter : $f = \left(\prod_i f_i\right) \cdot \left(\prod_i g_i\right)$

résolution $\Longrightarrow$ rationalité.

ens. déf en $\mathbb{Q}_p^n$ s'appelle semi-alg
fonction " " " " "

<u>ensuite</u> : $Z_{\mathbb{Q}_p, f}(s)$ — p varie? uniformité en p?

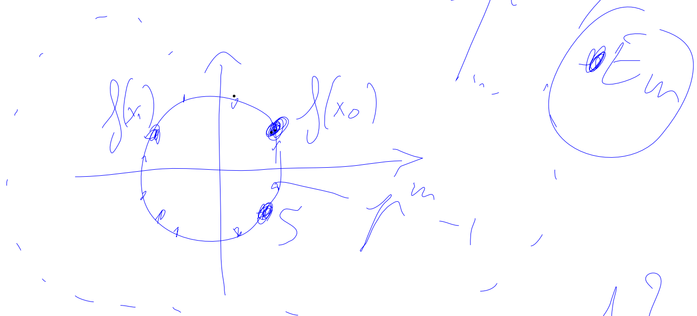
|| p grand

$Z_{\mathbb{F}_p((t)), f}(s)$ $\mathbb{F}_p((t))$ p grand

N_m, $\tilde{N}_m$

E_m sommes exponentielles finies.

$$E_m = \frac{1}{p^{mn}} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p^m)^n} \exp\left(2\pi i \cdot \frac{f(x)}{p^m}\right)$$



$\to$ { varie en m?

uniformité en p? $\longrightarrow$ $\mathbb{F}_p((t))$ p grand?

$\sum_{m \geq 0} E_m t^m$ — rationelle dans $\mathbb{C}(t)$!

$$|E_m|_{\mathbb{C}} \leq 1.$$

? $|E_m|_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$ si $m \longrightarrow \infty$? à quelle vitesse.

Cas le plus simple $f(x) = ax + b$ en une variable x. $a, b \in \mathbb{Z}$

$$|E_m|_{\mathbb{C}} \begin{cases} 1 & \text{pour } m \leq \operatorname{ord}(a) \\ 0 & \text{pour } m > \operatorname{ord}(a). \end{cases} \qquad E_m \begin{cases} \exp(2\pi i b/p^m) \\ 0 \end{cases}$$

prop

$f(x) = ax$ $\quad (b = 0)$.

$$E_m = \begin{cases} 1 & m \leq \operatorname{ord}(a) \\ 0 & m > \quad '' \end{cases}$$

Lemme 1. Suppose que $\operatorname{ord}(a) = 0$. $\quad a \in \mathbb{Z} \cap (\mathbb{Z}_p)^\times$

alors $E_1 = 0$.

$$E_1 = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{p-1} \exp\left(2\pi i\, a \cdot \frac{x}{p}\right)$$

$$\zeta = \exp\left(2\pi i \frac{a}{p}\right)$$ racine p-ième primitive de 1.

$$\zeta^p = 1 = \exp(2\pi i a) \qquad \zeta^{p'} \neq 1$$

$0 < p' < p$

$$E_1 = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{p-1} \zeta^x$$

$\zeta \neq 1$ $\quad$ $\operatorname{ord}(a) = 0$. $\quad$ $\zeta^p = 1$

$$= \frac{1}{p} \frac{\zeta^p - 1}{\zeta - 1} = 0.$$

Cas (général) $f(x) = ax$ $\quad$ $b = 0$

$\operatorname{ord}(a) \geq m$

$$E_m = \frac{1}{p^m} \sum_{x=0}^{p^m-1} \exp\left(2\pi i \frac{a}{p^m} \cdot x\right)$$

$$\frac{a}{p^m} \cdot x \in \mathbb{Z}.$$

$$= 1$$

$\operatorname{ord}(a) < m$ $\quad$ $(E_m = 0)$

$$E_m = \frac{1}{p^m} \cdot \sum_{x=0}^{p^m-1} e^{2\pi i \frac{ax}{p^m}}$$

$$= \frac{1}{p^m} \sum_{j=p^{\operatorname{ord}(a)}}^{p^{m-1}} \sum_{\substack{x \\ ax \equiv j \bmod p^{m-1}}} e^{2\pi i \frac{ax}{p^m}} \quad = 0$$

$ax = j \bmod p^{m-1}$ $\qquad \mathrm{ord}(a) < m$

$ax = j + p^{m-1} x'$ $\qquad x' = 0, \dots, p-1$

$$\sum_{x'=0}^{p-1} e^{2\pi i \left(\frac{j}{p^m} + \frac{p^{m-1} x'}{p^m} \right)}$$

$$= e^{2\pi i \frac{j}{p^m}} \cdot \underbrace{\sum_{x'=0}^{p-1} e^{2\pi i \cdot \frac{x'}{p}}}_{=0}$$

(E_1)

$\mathrm{ord}\, a = 0$

$E_m = 0$ $\qquad$ <u>m grand</u>

cas linéaire $f(x) = ax + b$

$$\sum_x \exp\left(2\pi i \left(\frac{ax+b}{p^m}\right)\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{2\pi i b}{p^m}\right)}\cdot \sum_x \dots$$

$e^{\frac{2\pi i a x}{p^n}}$

<u>f générale ?</u>

résolution pour f

$$E_m = \int_{x \in \mathbb{Z}_p^n} \exp\left(2\pi i \frac{f(x)}{p^m}\right) |dx|$$

choix de $\tilde{f}(x) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$

$\mathrm{ord}(\tilde{f}(x) - f(x)) \geq m$

résolution

$f(x) = u(x) \cdot x^a$

jac $\quad v(x)\, x^b$

$$\int_{x \in \mathbb{Z}_p^n} \underbrace{\exp\left(2\pi i \frac{u(x) \cdot x^a}{p^m}\right)}\, |v \cdot x^b|\, |dx|$$

! plus simple ?
: non : $u(x)$ analytique !

$$\underbrace{\exp\left(2\pi i \, x^a\right)}_{\text{pas produit ...}}$$

$\sum E_m t^m$ —— pas par la résolution ...

$f(x)$ linéaire en $x = (x_1, \dots, x_n)$
est simple $\quad \sum \underline{a_i} x_i \underline{+ b}$

$\underline{\min} \operatorname{ord}(a_i) \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} m \to 1, \to 0$